ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный педагогический университет»
Факультет математики, физики и информатики

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
И.о проректора по учебной работе и дополнительному образованию - начальник учебно-методического управления
А.Д. Вечедова
«30» мая 2018 г.

Рабочая программа дисциплины

Б 1. В. ОД.2. 1. Математический анализ

(шифр, название дисциплины)

Направление: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

(шифр, наименование направления)

Профили подготовки: «Математика» и «Информатика»

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр
Формы обучения очная; заочная

Сроки обучения – очно- 5 ; заочно- 5,5

Махачкала 2018

Автор: ____Керимов К.Г.., доцент _____ _____ ________
(ФИО, должность, ученое звание) (подпись) (дата)

Рецензент: _Агаханов С.А., доцент ____
(ФИО, должность, ученое звание)

Программа утверждена на заседаниях:

кафедры высшей математики___________
(протокол № 7 от « 21» марта 2018 г.)

Зав. кафедрой Гаджимурадов М.А., профессор, к.ф.м.н. _ ________
(ФИО, ученое звание) (подпись)

Ученом совете факультета математики, физики и информатики
(протокол № 8 от « 12 » апреля 2018 г.)

Председатель совета Бакмаев Ш.А., к.п.н., профессор _ _________
(ФИО, ученое звание) (подпись)

методическом совете ДГПУ
(протокол №5 от « 25 » мая 2018 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются:

- формирование знаний по математическому анализу необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности;
- развитие логического мышления и математической культуры;
- формирование необходимого уровня подготовки для понимания других математических и прикладных дисциплин;

Задачи дисциплины

- изучение основных понятий и методов математического анализа;
- формирование навыков и умений решать типовые задачи и работать со специальной литературой;
- умение использовать умение использовать методы математического анализа для решения теоретических и прикладных задач естественнонаучных дисциплин..

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В совокупности с другими дисциплинами ФГОС ВО дисциплина «Математический анализ» направлена на формирование следующих компетенций:

Таблица 1. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)

Код компетенции	Наименование компетенции
ПК-1	-готовность реализовывать образовательные программы по учебному предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов
ПСК-1	– владеть основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом.
ПСК-2	- владеет культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой.

В результате изучения дисциплины «Математический анализ» студенты должны:

Знать

Основы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных, числовых и функциональных рядов;

Уметь

Применять методы математического анализа для решения типовых и нестандартных задач дисциплин естественнонаучного направления;

Владеть

Навыками применения методов дифференциального исчислений для решения прикладных и теоретических задач.

3.Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина **«Математический анализ»** является базовой дисциплиной математического и естественнонаучного цикла федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) **по направлению 44.03.05 Педагогическое образование** и изучается в 1-5 семестрах.

Дисциплина «Математический анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса математики или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования.

Знания, полученные при изучении данной дисциплины служат основой для освоения дисциплин: «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математической статистики», «Дифференциальная геометрия», «Курсы по выбору» и т.д.

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины «Математический анализ» составляет **684 часов** (19 зачетных единиц).

Объем контактной работы обучающихся с преподавателем по дисциплине и на самостоятельную работу обучающихся очной формы отражен в таблице 2.

Таблица 2. Объем контактной работы обучающихся с преподавателем по дисциплине и на самостоятельную работу обучающихся очной формы

Вид работы	Трудоемкость (в часах) по семестрам						Итого
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Общая трудоемкость, часов	**144**	**153**	**108**	**117**	**108**		**630**
Аудиторная работа:							
Лекции (Л)	36	34	18	36	16		140
Практические занятия (ПЗ)	18	18	16	18	16		86
Лабораторные работы (ЛР)	18	18	16	18	16		86
КСР							
Самостоятельная работа:	**72**	**83**	**58**	**45**	**60**		**318**
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	**зач**	**экз**	**зач**	**экз**	**зач**	**Курсовая работа**	

Объем дисциплины контактной работы обучающихся с преподавателем и на самостоятельную работу обучающихся заочной формы отражен в таблице 3.

Таблица 3. Объем контактной работы обучающихся с преподавателем по дисциплине и на самостоятельную работу обучающихся заочной формы

Вид работы	Трудоемкость (в часах) по семестрам						Итого
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Общая трудоемкость, часов							
Аудиторная работа:							
Лекции (Л)							
Практические занятия (ПЗ)							
Лабораторные работы (ЛР)	-						-
КСР							

Вид работы	Трудоемкость (в часах) по семестрам						Итого
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Самостоятельная работа:							
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)							

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Содержание разделов учебной дисциплины (модуля)

Введение в анализ.

Раздел 1. Функция одной переменной.

1.1. Понятие и способы задания функции. 1.2. Четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции, обратная функция. 1.3. Элементарные функции и их классификация. 1.4. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

Раздел 2. Числовая последовательность.

2.1. Понятие и предел последовательности и подпоследовательности. 2.2. Понятие сходимости и ограниченности последовательности. 2.3. Необходимое условие сходимости последовательности. 2.4. Предел суммы, произведения и частного последовательностей. 2.5. Монотонная последовательность и её предел. 2.6. Число ***е***. 2.7. Лемма о вложенных отрезках. 2.8. Критерий сходимости последовательности.

Раздел 3. Предел функции.

3.1. Понятие окрестности точки. 3.2. Предел функции в точке по Коши и по Гейне. 3.3. Односторонние пределы. 3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и сравнение. 3.5. Предел суммы, произведения и частного функций. 3.6. Первый и второй замечательные пределы. 3.7. Предел сложной функции.

.

Раздел 4. Непрерывность функции.

4.1. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Три определения непрерывности функции в точке. 4.2. Односторонняя непрерывность. 4.3. Непрерывность сложной функции. 4.4. Точки разрыва функции и их классификация. 4.5. Теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке. 4.6. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. 4.7. Непрерывность основных элементарных функций. 4.8. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 5. Производная и дифференциал функции одной переменной.

5.1. Задачи, приводящие к понятию производной. 5.2. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. 5.3. Непрерывность и дифференцируемость функции. 5.4. Производная суммы, произведения, частного, композиции и обратной функции. 5.5. Таблица производных. 5.6. Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков. 5.7. Производная функции, заданной параметрически.

Раздел 6. Теоремы о среднем.

6.1. Теорема Ферма. 6.2. Теорема Ролля. 6.3. Теорема Лагранжа, формула конечных приращений Лагранжа.

Раздел 7. Приложения производной.

7.1. Правила Лопиталя. 7.2. Формула Тейлора. 7.3. Условия постоянства и монотонности функции. 7.4. Экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия экстремума. 7.5. Выпуклость и точки перегиба функции. 7.6. Асимптоты функции. 7.7. Полное исследование функции и построение её графика.

Интегральное исчисление функции одной переменной.

Раздел 8. Понятие неопределенного интеграла и методы интегрирования.

8.1. Задача восстановления функции по её производной. 8.2. Первообразная и неопределенный интеграл. 8.3. Свойства неопределенного интеграла.. 8.4. Основная таблица интегралов.

8.5. Непосредственное интегрирование. 8.6. Интегрирование сложной функции, таблица интегралов сложных функций. 1.7. Интегрирование заменой переменной. 8.8. Интегрирование по частям.

Раздел 9. Интегрирование рациональных функций.

9.1. Понятие рациональной функции. 9.2. Целая и дробная рациональные функции. 9.3 . Правильная и неправильная рациональные дроби. 9.4. Выражение неправильной рациональной дроби через целую рациональную функцию и правильную рациональную дробь. 9.5. Простые рациональные дроби, представление правильной рациональной дроби в виде суммы простых рациональных дробей, метод неопределенных коэффициентов. 9.6. Интегрирование простых рациональных дробей. 9.7 Рекуррентная формула для вычисления интегралов вида $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. 9.8. Понятие о не интегрируемости функции.

Раздел 10. Интегрирование простейших иррациональных и тригонометрических функций функций.

10.1. Интегрирование интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^k}, \ldots, \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}\right)dx.$

10.2. Интегрирование биномиального дифференциала. 10.3. Подстановки Чебышева., интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$ 10.4. Интегрирование тригонометрических функций.

Раздел 11. Понятие и существование определенного интеграла.

11.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. 11.2. Понятие определенного интеграла. 11.3. Необходимое условия существование определенного интеграла. 11.4. Суммы Дарбу. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла. 11.5. Интегрируемость непрерывной функции. 11.6. Основные свойства определенного интеграла.

Раздел 12. Вычисление определенного интеграла.

12.1. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. 12.2. Существование первообразной непрерывной функции. 12.3. Формула Ньютона-Лейбница. 12.4. Замена переменной в определенном интеграле. 12.5 Интегрирование по частям.

Раздел 13. Несобственные интегралы.

13.1.Понятие несобственного интеграла первого рода. 13.2, Вычисление несобственного интеграла от непрерывной функции первого рода. 13.3. Понятие несобственного интеграла второго рода. 13.4. Вычисление несобственного интеграла от непрерывной функции второго рода..

Раздел 14. Приложения определенного интеграла.

14.1. Вычисление площади плоской фигуры. 14.2. Вычисление длины дуги плоской кривой. 14.3. Вычисление объемов тел. 14.4. Вычисление работы переменной силы.

Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных

Раздел 15. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

15.1. Евклидово пространство. Точечные множества в евклидовом пространстве. 15.2. Функции многих переменных. 15.3. Предел и повторные пределы функций многих переменных. 15.4. Непрерывность и равномерная непрерывность функций многих переменных. 15.5. Частные производные первого и высших порядков функции двух переменных, смешанные производные. 15.6. Дифференцируемость и полный дифференциал функции двух переменных. 15.7. Дифференциалы высших порядков. 15.8. Производные и дифференциалы сложной и неявной функций. 15.9. Производная по направлению. 15.10. Локальный экстремум функции двух переменных. 15.11. Необходимое условие локального экстремума. 15.12. Достаточное условие локального экстремума. 15.13. Условный экстремум функции двух переменных, 15.14. Необходимое и достаточное условия условного экстремума.

Раздел 16. Интегральное исчисление функций многих переменных.

16.1 Квадрируемость множества. 16.2. Понятие и существование двойного интеграла. 16.3. Основные свойства двойного интеграла. 16.4. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. 16.5. Двойной интеграл в полярных координатах. 10.6. Приложения двойного интеграла. 16.7. Кубируемость множества. Понятие, основные свойства и вычисление интеграла.. 16.8. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. 16.9. Приложения тройного интеграла. 16.10. Криволинейный интеграл по координатам: понятие, существование, основные свойства и вычисление. 16.11. Формула Грина, независимость криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. 16.12. Криволинейный интеграл по длине дуги: понятие, существование, основные свойства и вычисление. 16.13. приложения криволинейных интегралов.

Числовые и функциональные ряды

Раздел 17. Числовые ряды.

17.1. Начальные понятия. 17.2. Геометрический и гармонический ряды. 17.3. Свойства сходящихся рядов. 17.4. Необходимый признак сходимости ряда, теорема об остатке ряда.. Критерий Коши. 17.5. Положительные ряды. Признаки сравнения, Даламбера и Коши сходимости положительных рядов. 17.6. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Условная и абсолютная сходимость.

Раздел 18. Функциональные последовательности и ряды.

18.1 Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий равномерной сходимости, Признак Вейерштрасса. 18.2. Свойства равномерно сходящихся рядов. 18.3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. 18.4. Ряд Тейлора. Необходимый и достаточный признаки сходимости ряда Тейлора. 18.5. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора. 18.6. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.

Раздел 19. Тригонометрический ряд Фурье.

19.1. Понятие тригонометрического ряда Фурье. 19.2. Достаточный признак сходимости ряда Фурье. 19.3. Разложение функций в ряды Фурье в промежутке $[-\pi,\pi]$ и в произвольном промежутке $[-l,l]$. Разложение четных и нечетных функций в ряды Фурье.

5.2. Структура учебной дисциплины (модуля)

Структура дисциплины по темам отражена в таблицах 6-9

Таблица 6. Структура учебной дисциплины (модуля) для очной формы обучения

Тема (раздел) дисциплины	**Итого**	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость (в часах)**				
		ЛК	**ПЗ**	**ЛР**	**КСР**	**С/р**
Первый семестр						
Раздел 1. Функции одной переменной		4	6	4		
Раздел 2. Числовая последовательность		4	10	4		
Раздел 3. Предел функции		6	10	6		
Раздел 4. Непрерывность функции		4	10	4		
Всего за семестр		**18**	**36**	**18**		
Второй семестр						
Раздел 5. Производная и дифференциал функции одной переменной		10	10	6		
Раздел 6. Теоремы о среднем		6	4	4		
Раздел 7. Приложения производной		14	16	8		
Всего за семестр		**30**	**30**	**18**		
Третий семестр						
Раздел 5. Производная и дифференциал функции одной переменной		6	6	6		
Раздел 6. Теоремы о среднем		2	2	2		
Раздел 7. Приложения производной		8	8	8		
Всего за третий семестр		**16**	**16**	**16**		
Четвертый семестр						
Раздел 8. Понятие неопределенного интеграла и методы интегрирования.		3	6	4	2	
Раздел 9. Интегрирование рациональных функций		3	4	2	2	
Раздел 10. Интегрирование простейших иррациональных и тригонометрических функций		2	4	4	2	
Раздел 11. Понятие, существование и основные свойства определенного интеграла		4	2		2	
Раздел 12. Вычисление определенного интеграла		2	2	2	2	
Раздел 13. Несобственные интегралы		2	2	2	2	
Раздел 14. Приложения определенного интеграла		2	6	4	3	
Всего за четвертый семестр	**?**	**18**	**26**	**18**	**15**	**?**
Пятый семестр						
Раздел 15. Дифференциальное исчисление функций многих переменных		10	8	8	1	

Раздел 16. Интегральное исчисление функций многих переменных		12	8	8	1	
Всего за пятый семестр		**22**	**16**	**16**	**2**	
Шестой семестр						
Раздел 17. Числовые ряды		6	6	6	1	
Раздел 18. Функциональные последовательности и ряды		6	4	4	1	
Раздел 19. Степенные ряды		4	6	6	1	
Раздел 20. Тригонометрический ряд Фурье		2	2	2	1	
Всего за шестой семестр	**?**	**18**	**18**	**18**	**4**	**?**

Таблица 7. Структура учебной дисциплины (модуля) для заочной формы обучения

Тема (раздел) дисциплины		**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость (в часах)**				
		Лк	**ПЗ**	**ЛР**	**КСР**	**С/р**
Первый семестр						
Раздел 1. Функции одной переменной						
Раздел 2. Числовая последовательность						
Раздел 3. Предел функции						
Раздел 4. Непрерывность функции						
Всего за первый семестр		**4**	**8**	**4**		
Второй семестр						
Раздел 5. Производная и дифференциал функции одной переменной						
Раздел 6. Теоремы о среднем						
Раздел 7. Приложения производной						
Всего за второй семестр		8	8	4		
Третий семестр						
Раздел 5. Производная и дифференциал функции одной переменной						
Раздел 6. Теоремы о среднем						
Раздел 7. Приложения производной						
Всего за третий семестр		4	4	4		
Четвертый семестр						
Раздел 8. Понятие неопределенного интеграла и методы интегрирования.						
Раздел 9. Интегрирование рациональных функций						
Раздел 10. Интегрирование простейших иррациональных и тригонометрических функций						
Раздел 11. Понятие, существование и основные свойства определенного интеграла						
Раздел 12. Вычисление определенного интеграла						
Раздел 13. Несобственные интегралы						
Раздел 14. Приложения определенного интеграла						
Всего за четвертый семестр		4	6	4		
Пятый и шестой семестры						
Раздел 15. Дифференциальное исчисление функций многих переменных						

Раздел 16. Интегральное исчисление функций многих переменных						
Всего за пятый семестр		8	8	8		
Шестой семестр						
Раздел 17. Числовые ряды						
Раздел 18. Функциональные последовательности и ряды						
Раздел 19. Степенные ряды						
Раздел 20. Тригонометрический ряд Фурье						
Всего за шестой семестр		4	4	4		

Целью практических и лабораторных занятий является контроль усвоения студентами теоретического материала по дисциплине, а также привитие навыков и умений применения полученных знаний при решении прикладных задач.

Применяемые технологии при проведении практического занятия:
- ознакомление студентов с целью и задачами занятия;
- фронтальный опрос теоретического материала;
- анализ и решение практических задач;
- выполнение контрольных и кратких самостоятельных работ;
- защита лабораторных работ;
- подведение итогов и оценка знаний студентов.

Темы практических занятий

№№ п/п	**№раздела дисциплины**	**Тематика практических занятий**	**Трудоемкость (в час.)**	**Компетенции ОК, ПК**
1	1	Понятие и способы задания функции. Четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции, обратная функция. Элементарные функции и их классификация. Основные элементарные функции, их свойства и графики.	6	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
2	2	**Числовая последовательность.** Понятие и предел последовательности и подпоследовательности. Понятие сходимости и ограниченности последовательности. Необходимое условие сходимости последовательности. Предел суммы, произведения и частного последовательностей. Монотонная последовательность и её предел. Число ***e***. Лемма о вложенных отрезках. Критерий сходимости последовательности.	10	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
3	3	**Предел функции**. Понятие окрестности точки. Предел функции в точке по Коши и по Гейне. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и сравнение. Предел суммы, произведения и частного функций. Первый и второй замечательные пределы. Предел сложной функции.	10	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
4	4	**Непрерывность функции.** Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Три определения непрерывности функции в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва функции и их классификация. Теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Непрерывность основных элементарных функций. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции.	10	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
5	5	**Производная и дифференциал функции одной переменной.** Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Непрерывность и дифференцируемость функции. Производная суммы, произведения, частного, композиции и обратной функции. Таблица производных. Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной параметрически.	10 (6)	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
	6	**Теоремы о среднем.** Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа, формула конечных приращений Лагранжа.	4 (2)	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2

7	7	**Приложения производной.** Правила Лопиталя. Формула Тейлора. Условия постоянства и монотонности функции. Экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия экстремума. Выпуклость и точки перегиба функции. Асимптоты функции. Полное исследование функции и построение её графика.	16 (8)	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
8	8	**Понятие неопределенного интеграла и методы интегрирования.** Задача восстановления функции по её производной. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Основная таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Интегрирование сложной функции, таблица интегралов сложных функций. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование по частям.	6	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
9	9	**Интегрирование рациональных функций.** Понятие рациональной функции. Целая и дробная рациональные функции. Правильная и неправильная рациональные дроби. Выражение неправильной рациональной дроби через целую рациональную функцию и правильную рациональную дробь. Простые рациональные дроби, представление правильной рациональной дроби в виде суммы простых рациональных дробей, метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование простых рациональных дробей. Рекуррентная формула для вычисления интегралов вида $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Понятие о не интегрируемости функции.	4	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
10	10	**Интегрирование простейших иррациональных и тригонометрических функций.** Интегрирование интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^k}, \ldots, \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}\right)dx.$ Интегрирование биномиального дифференциала. Подстановки Чебышева., интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$ Интегрирование тригонометрических функций.	4	ПСК-1, ПСК-2
11	11	**Понятие и существование определенного интеграла.** Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла. Необходимое условия существование определенного интеграла. Суммы Дарбу. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла. Интегрируемость непрерывной функции. Основные свойства определенного интеграла.	2	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
12	12	**. Вычисление определенного интеграла.** Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.	2	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
13	13	**Несобственные интегралы.** Понятие несобственного интеграла первого рода. Вычисление несобственного интеграла от непрерывной функции первого рода. Понятие несобственного интеграла второго рода. Вычисление несобственного интеграла от непрерывной функции второго рода..	2	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
14	14	**Приложения определенного интеграла.** Вычисление площади плоской фигуры. Вычисление длины дуги плоской кривой. Вычисление объемов тел. Вычисление работы переменной силы.	6	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
15	15	**Дифференциальное исчисление функций многих переменных.** Евклидово пространство. Точечные множества в евклидовом пространстве. Функции многих переменных . Предел и повторные пределы функций многих переменных. Непрерывность и равномерная непрерывность функций многих переменных. Частные производные первого и высших порядков функции двух переменных, смешанные производные. Дифференцируемость и полный дифференциал функции двух переменных. Дифференциалы высших порядков. Производные и дифференциалы сложной и неявной функций. Производная по направлению. Локальный экстремум функции двух переменных. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума. Условный экстремум	8	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2

		функции двух переменных, Необходимое и достаточное условия условного экстремума.		
16	16	**Интегральное исчисление функций многих переменных.** Квадрируемость множества. Понятие и существование двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойного интеграла. Кубируемость множества. Понятие, основные свойства и вычисление интеграла.. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла. Криволинейный интеграл по координатам: понятие, существование, основные свойства и вычисление. Формула Грина, независимость криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Криволинейный интеграл по длине дуги: понятие, существование ,основные свойства и вычисление. приложения криволинейных интегралов.	8	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
17	17	**. Числовые ряды.** Начальные понятия. Геометрический и гармонический ряды. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда, теорема об остатке ряда.. Критерий Коши. Положительные ряды. Признаки сравнения, Даламбера и Коши сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Условная и абсолютная сходимость.	6	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
18	18	**Функциональные последовательности и ряды.** Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий равномерной сходимости, Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.	4	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
19	19	**Степенные ряды.** Теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Ряд Тейлора. Необходимый и достаточный признаки сходимости ряда Тейлора. 18.Разложение элементарных функций в ряды Тейлора. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям.	6	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2
20	20	**Тригонометрический ряд Фурье**. Понятие тригонометрического ряда Фурье. Достаточный признак сходимости ряда Фурье. Разложение функций в ряды Фурье в промежутке $[-\pi,\pi]$ и в произвольном промежутке $[-l,l]$. Разложение четных и нечетных функций в ряды Фурье.	2	ПК-1, ПСК-1, ПСК-2

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Таблица 6.

Вопросы для самостоятельного изучения.

<u>Первый курс (второй семестр)</u>

<u>Второй курс.</u>

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Инвариантность формы дифференциала.
3. Логарифмическое дифференцирование функций.
4. Производные гиперболических функций.
5. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.
6. Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши и в форме Лагранжа.
7. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.
8. Разложение правильных рациональных дробей на простые дроби.
9. Метод Остроградского интегрирования рациональных дробей.
10. Интегралы вида $\int R(shx,\, chx)dx.$
11. Замечание об интегралах, не выражающихся через элементарные функции.
12. Определенный интеграл. Понятие интегрируемости функции. Интегрируемость монотонных и

кусочно-непрерывных функций.
13. Непрерывность интеграла по верхнему пределу.
14. Вторая теорема о среднем значении для определенного интеграла.
15. Замечание о способах приближенного вычисления определенного интеграла.
16. Вычисление статических моментов и центра тяжести кривой.
17. Исследование сходимости несобственных интегралов.

Третий курс.

1.Последовательности точек в n-мерном пространстве.
2.Свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах.
3.Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
4.Условный экстремум. Метод Лагранжа.
5.Неявные функции, определяемые системой уравнений.
6.Восстановление функции по её полному дифференциалу.
7.Достаточные признаки сходимости положительных рядов: признаки Рабе, Куммера, Бертрана.
8.О перестановке членов в числовых рядах.
9.Умножение абсолютно сходящихся рядов.
10.Некоторые косвенные формы разложения функций в степенные ряды.
11.Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.
12.Сходимость в среднем. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

Самостоятельная работа обучающихся осуществляется методами самообучения и самоконтроля **в двух направлениях**:

- для закрепления и углубления знаний и навыков, полученных на лекционных и практических занятиях;
- для самостоятельного изучения отдельных тем и вопросов дисциплины.

Самостоятельная работа осуществляется **в виде:**

- конспектирования учебной, научной и периодической литературы;
- проработки учебного материала (по конспектам лекций учебной и научной литературы);
- подготовки сообщений к практическим занятиям, к участию в тематических дискуссиях, работе научного кружка и конференциях;
- поиска и обзора научных публикаций и электронных источников информации, подготовки заключения по обзору информации;
- выполнения лабораторных, контрольных работ, курсовых работ (проектов);
- решения практических и ситуационных задач;
- составления аналитических таблиц, графического оформления материала;
- работы с тестами и контрольными вопросами для самопроверки;

Результаты самостоятельной работы контролируются и учитываются при текущем и промежуточном контроле успеваемости обучающегося. При этом проводятся тестирование, экспресс-опрос и фронтальный опрос на лабораторных и практических занятиях, заслушивание докладов и сообщений по дополнительному материалу к лекциям, проверка домашних контрольных работ и т.д.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Компетенция	Этапы формирования	Процедура оценивания
ПК-1 Готовность реализовывать образовательные программы по учебному предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов	**Знать:** содержание учебного предмета (учебных предметов); принципы и методы разработки рабочей программы учебной дисциплины; преподаваемый предмет и специальные подходы к обучению; программы и учебники по учебной дисциплине **Уметь:** применять принципы и методы разработки рабочей программы учебной дисциплины на основе примерных основных общеобразовательных программ и обеспечивать ее выполнение; использовать и апробировать	Устный опрос, контрольная работа.

	специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся; планировать и осуществлять учебный процесс в соответствии с основной общеобразовательной программой **Владеть:** навыками разработки и реализации программы учебной дисциплины в рамках основной общеобразовательной программы основного общего образования; навыками корректировки рабочей программы учебной дисциплины для различных категорий обучающихся и реализации учебного процесса в соответствии с основной общеобразовательной программой основного общего образования; навыками составления календарного плана учебного процесса по предмету и осуществления обучения по готовой рабочей программе.	
ПСК-1 – владеть основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом.	**Знать:** основные элементарные функции и их свойства, утверждения и теоремы связанные с ними, алгебра многочленов и линейных систем, понятий плоских фигур и пространственных тел их площадей и объемов в пределах программ алгебры и анализа, геометрии школьного курса; **Уметь:** проводить полное исследование функции и строить эскиз его графика используя при этом понятия предел, непрерывность, производная, экстремумы, асимптоты, монотонность, периодичность, четность, нечетность; решать простейшие алгебраические уравнения, неравенства и системы; решать плоские и пространственные задачи геометрии аналитическими методами используя различные формулы, соотношения; находить производные и интегралы элементарных функций; использовать ряды в приближенных вычислениях; выбрать в зависимости от требуемых целей законы, формы, правила, приемы математики в решении физических и математических задач. **Владеть:** навыками решения стандартных учебных задач с использованием основных математических понятий (предел, непрерывность, производная, дифференциал, интеграл, уравнения, ряды); основными понятиями школьного курса «Алгебра и начала анализа», «Геометрия», «Физика».	Устный опрос, тестирование, контрольная работа, лабораторная работа, коллоквиум.
ПСК – 2 владеть культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой.	**Знать:** основные понятия математического анализа, теории функций комплексного анализа, дискретной математики, математической логики, элементов комбинаторики, основные методы решения дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными **Уметь**: Вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы,	Устный опрос, тестирование, контрольная работа, лабораторная работа, коллоквиум.

	находить модуль и аргумент комплексного числа, решать простейшие обыкновенные уравнения первого и второго порядка известными методами; решать краевые задачи для уравнений в частных производных методом разделения переменных и методы построения функции Грина, решать комбинаторные задач, решать типовые для физики статистические задачи. **Владеть:** основными понятиями школьного курса «Алгебра и начала анализа», основными положениями классических разделов математической науки, основными понятиями школьного курса математики, связанные с теорией функций комплексного переменного, навыками решения простейших дифференциальных уравнений и простейших статистических задач.	

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

ПК-1 -готовность реализовывать образовательные программы по учебному предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов

Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	**Оценочная шкала**		
	Удовлетворительно	**Хорошо**	**Отлично**
Знать: содержание учебного предмета (учебных предметов); принципы и методы разработки рабочей программы учебной дисциплины; преподаваемый предмет и специальные подходы к обучению; программы и учебники по учебной дисциплине **Уметь:** применять принципы и методы разработки рабочей программы учебной дисциплины на основе примерных основных общеобразовательных программ и обеспечивать ее выполнение; использовать и апробировать специальные подходы к обучению в целях включения в образовательный процесс всех обучающихся; планировать и осуществлять учебный процесс в соответствии с основной общеобразовательной программой **Владеть:** навыками разработки и реализации программы учебной дисциплины в рамках основной общеобразовательной программы основного общего образования; навыками корректировки рабочей программы учебной дисциплины для различных категорий обучающихся и реализации учебного процесса в соответствии с основной общеобразовательной	Знает основной материал, но допускает неточности, При решении примеров, задач допускает ошибки.	Знает учебный материал. Умеет правильно применить теорию при выполнении практических заданий, владеет необходимыми приемами выполнения практических заданий, но затрудняется с применением знаний, связанных с новыми нестандартными задачами. показывает должный уровень сформированности компетенций.	Знает глубоко и прочно учебный материал, свободно отвечает на вопросы, свободно решает задачи, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий, показывает должный уровень сформированности компетенций.

программой основного общего образования; навыками составления календарного плана учебного процесса по предмету и осуществления обучения по готовой рабочей программе.			

ПСК-1 – владеть основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом.

Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	**Оценочная шкала**		
	Удовлетворительно	**Хорошо**	**Отлично**
Знать: основные элементарные функции и их свойства, утверждения и теоремы связанные с ними, алгебра многочленов и линейных систем, понятий плоских фигур и пространственных тел их площадей и объемов в пределах программ алгебры и анализа, геометрии школьного курса; **Уметь:** проводить полное исследование функции и строить эскиз его графика используя при этом понятия предел, непрерывность, производная, экстремумы, асимптоты, монотонность, периодичность, четность, нечетность; решать простейшие алгебраические уравнения, неравенства и системы; решать плоские и пространственные задачи геометрии аналитическими методами используя различные формулы, соотношения; находить производные и интегралы элементарных функций; использовать ряды в приближенных вычислениях; выбрать в зависимости от требуемых целей законы, формы, правила, приемы математики в решении физических и математических задач.	Знает основной материал, но допускает неточности, При решении примеров, задач допускает ошибки.	Знает учебный материал. Умеет правильно применить теорию при выполнении практических заданий, владеет необходимыми приемами выполнения практических заданий, но затрудняется с применением знаний, связанных с новыми нестандартными задачами. показывает должный уровень сформированности компетенций.	Знает глубоко и прочно учебный материал, свободно отвечает на вопросы, свободно решает задачи, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий, показывает должный уровень сформированности компетенций.

Владеть: навыками решения стандартных учебных задач по физике с использованием основных математических понятий (предел, непрерывность, производная, дифференциал, интеграл, уравнения, ряды); основными понятиями школьного курса «Алгебра и начала анализа», «Геометрия», «Физика».			

ПСК-2 - владеет культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой.

Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
	Удовлетворительно	**Хорошо**	**Отлично**
Знать: основные понятия математического анализа, теории функций комплексного анализа, дискретной математики, математической логики, элементов комбинаторики, основные методы решения дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными **Уметь**: Вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы, находить модуль и аргумент комплексного числа, решать простейшие обыкновенные уравнения первого и второго порядка известными методами; решать краевые задачи для уравнений в частных производных методом разделения переменных и методы построения функции Грина, решать комбинаторные задач, решать типовые для физики статистические задачи. **Владеть:** основными понятиями школьного курса «Алгебра и начала анализа», основными положениями классических разделов математической науки, основными понятиями школьного курса математики, связанные с теорией функций комплексного переменного, навыками решения простейших дифференциальных уравнений и простейших статистических задач.	Знает основной материал, но допускает неточности, При выполнении практических заданий допускает ошибки.	Знает учебный материал. Умеет правильно применить теорию при выполнении практических заданий, владеет необходимыми приемами выполнения практических заданий, но затрудняется с применением знаний, связанных с новыми нестандартными задачами. показывает должный уровень сформированности компетенций.	Знает глубоко и прочно учебный материал, свободно отвечает на вопросы, свободно решает задачи, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий, показывает должный уровень сформированности компетенций.

7.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа №1 (раздел 5)

Вариант № 1

1. Используя определение производной, найти производную функции $y=5x^2+2x$;

2. Исследовать функцию на дифференцируемость: $y=\begin{cases} x^2+1 & при\ x<1, \\ x-1 & при\ x\geq 1. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

1) $y=\left(x^2+4x-2\right)^{10}$; 2) $y=\dfrac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\sin(x^2+2^x)$;

4. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=t^3+1. \end{cases}$

5. 1) Найти угловой коэффициент и угол с осью абсцисс касательной к кривой $y=\cos x \quad при\ x=\dfrac{\pi}{2}$.

2) Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ в точке $M(1;\dfrac{1}{2})$.

6. Найти дифференциалы второго порядка функции $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7. Найти производную указанного порядка функций $y=e^{-x^2}$, *найти* y''';

Вариант № 2

1. Используя определение производной, найти производную функции $y=3^{x-1}$.

2. Исследовать функцию на дифференцируемость: $y=\begin{cases} \sin x & при\ x\leq 0, \\ \cos x & при\ x>0. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

1) $y=x^4(8\ln^2 x-4\ln x+1)$; 2) $y=xe^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}$; 4) $y=arctg\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$; 5) $y=\sin(\ln(x^2+1))$.

4. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x=2^{\ln t}, \\ y=\ln^2 t. \end{cases}$

5. 1) Найти угловой коэффициент и угол с осью абсцисс касательной к кривой $y=x^3-x^2 \quad при\ x=0$.

2) На кривой $y=3x^2-4x+1$ найти точку, в которой касательная прямой параллельна $y=2x+1$

6. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$.

7. Найти производную функции указанного порядка: $y=e^{-x}\sin x$, *найти* y'''.

Контрольная работа №2 (разделы 6 и 7)

Вариант № 1

1. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функций:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$ *на отрезке* $[0;1]$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}-1$ *на отрезке* $[-1;1]$.

Если применима теорема Лагранжа, то найти соответствующие значения c.

2. Пользуясь формулой Тейлора, разложить функцию $f(x)=x^4-3x^2+5x-2$ по степеням $x-1$.

3. Используя правило Лопиталя, вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$;

4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$; 2) $y=(2x+1)e^{-\frac{x}{2}}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке $y=\sqrt{100-x^2}$, $x\in[-6;8]$;

6. Среди всех прямоугольников данной площади S найти прямоугольник наименьшего периметра.

7. Провести полное исследование функции:

1) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 2) $y=(x+1)e^x$.

Вариант № 2

1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функций:

1) $y=x^2-2x-3=0$ на отрезке $[-1;3]$; 2) $y=1-\sqrt[5]{x}$ на отрезке $[-1;1]$.

Если применима теорема Ролля, то найти с.

2. В какой точке касательная к кривой $y=4-x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2;0)$ и $B(1;3)$.

3. Применяя правила Лопиталя, вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\cdot\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7$;

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке $y=\sin 2x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

6. Число 64 разложить на два множителя, чтобы их сумма квадратов была наименьшей.

7. Провести полное исследование функции $y=x\cdot\ln x$.

Контрольная работа №3 (разделы 8,9,10)

Вариант №1

1. Вычислить следующие интегралы

1) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; 2) $\int x^2\sqrt{1-x}dx$; 3) $\int(x-2).3^{2x}dx$; 4) $\int\frac{x^4+3x+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx$;

5) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

2. Вычислить интегралы:

1) $\int x^{-2/3}(x^{1/3}+1)^{-2}dx$; 2) $\int\sin^3 2x\cos^2 2xdx$; 3) $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

Вариант № 2

1. Вычислить следующие интегралы

1) $\int e^{x^2} x dx$; 2) $\int (x+1)\sqrt{x+2}dx$; 3) $\int (3-2x)\cos x dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 5) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

2. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 3) $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 4) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Вариант № 3

1. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int \frac{arctg^2 2x}{1+4x^2}dx$; 2) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int arctgx dx$; 4) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$; 5) $\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx.$

2. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{\frac{1}{4}}dx$; 3) $\int \cos^4 3x dx$; 4) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

Контрольная работа №4 (разделы 11, 12, 13, 14)
Вариант № 1

1. Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона – Лейбница:

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; 2) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)}$.

2. Методом замены переменной вычислить интегралы:

1) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; 2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx.$

3. Методом интегрирования по частям, вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$;

4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$.

5. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

1) $y=x^2$ и $y=2x+3$, 2) координатой $\rho = a(1+\cos\varphi),\ a>0$.

6. Найти длину дуги кривой:

1) ценной линии $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ ($a>0$) на сегменте $\lfloor -a,\ a\rfloor$;

Вариант №2

1. Вычислить интегралы:

1) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 2) $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.

2. Методом замены переменной вычислить интегралы

1) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 2) $\int_0^d x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$

3. Методом интегрирования по частям, вычислить интеграл $\int_0^e \ln x dx$;

4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ и осью Ox.

6. Вычислить длину дуги одного витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

Вариант №3

1. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx$; 2) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.

2. Методом замены переменной вычислить интегралы

1) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 2) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

3. Методом интегрирования по частям, вычислить интеграл $\int_0^1 arctgx dx$.

4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_o^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

5. Вычислить площадь фигуры ограниченной эллипсом $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

6. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0, 0)$ и $(4, 8)$;

Контрольная работа 5 (раздел 15)

***Вариант* 1.**

1.Найти области определения функций: *а*) $z = \frac{2x+y}{x-y}$; *б*) $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$.

2.Вычислить двойные и повторные пределы функций в указанных точках, если они существуют: *а*) $z = \frac{xy}{1 - \sqrt{xy+1}}$ в точке (0; 0); *б*) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ в точке (∞; ∞).

3.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z = \mathrm{tg}(x^2 - y)$.

4.Вычислить приближенное значение выражения $\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2}$.

5.Найти производную первого порядка неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $y^x - x^y = 2$.

6.Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке A(3; 4) в направлении точки B(1; 3).

7Исследовать на локальный экстремум функцию $z = 4x + 2y - x^2 - y^2$.

***Вариант* 2.**

1.Найти области определения функций: *а*) $z = \frac{x-y}{\ln x}$; *б*) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

2.Вычислить двойные и повторные пределы функций в указанных точках, если она существуют: *а*) $z = \frac{\sin xy}{x}$ в точке (0; 0); *б*) $z = \frac{x^2+y}{x^2-y}$ в точке (0; 0).

3.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

4.Вычислить приближенное значение выражения $2{,}01^{3{,}03}$.

5.Найти производную первого порядка неявной функции $y(x)$, из уравнения $y=x-\ln y$.

6.Найти производную функции $z=\arcsin(x-y)$ в точке $A(1; 3)$ в направлении точки $B(6; 7)$.

7.Исследовать на локальный экстремум функцию $z=xy^2(1-x-y)$.

***Вариант* 3.**

1.Найти области определения функций: *а*) $z = \frac{x^2y^2}{\sqrt[4]{x+y-1}}$; *б*) $z = \ln(x^2 - 3x - y + 2)$.

2.Вычислить двойные и повторные пределы функций в заданных точках, если они существуют: *а*) $z = \frac{tgxy}{y}$ в точке $(0; 0)$; *б*) $z = \frac{x+y}{x}$ в точке $(\infty; \infty)$.

3.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z = x\ln\frac{y}{x}$.

4.Вычислить приближенное значение выражения $\sqrt{1{,}01^3 + 1{,}98^3}$.

5.Найти производную первого порядка неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $5-x=\arcsin(x+y)$.

6.Найти производную функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $A(1; 1)$ в направлении точки $B(3; 2)$.

7.Исследовать на локальный экстремум функцию $z=x^2-xy+y^2$.

***Вариант* 4.**

1.Найти области определения функций: *а*) $z = arctg\sqrt{xy}$; *б*) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt[6]{x - y}$.

2.Найти двойные и повторные пределы функций в указанных точках, если они существуют:

а) $z = \frac{\sqrt{xy+9} - 3}{xy}$ в точке $(0; 0)$; *б*) $z = y\sin\frac{1`}{x}$ в точке $(0; 0)$.

3.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z=\ln\cos(x+y)$.

4.Вычислить приближенное значение выражения $\sqrt{3{,}97 + 3{,}03}$.

5.Найти производную первого порядка неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2+y+\ln(x^2-y^2)=a^2$.

6.Вычислить производную функции $z=x^2y^2$ в точке $A(1; 2)$ в направлении точки $B(5;4)$.

7.Исследовать функцию $z=x^3+y^3-15x$ на экстремум.

Контрольная работа 6 (раздел 16)

***Вариант* 1.**

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \cos(x + y)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$, $y = x$, $y = \pi$.

2. Вычислить в полярных координатах двойной интеграл $\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=16$.

3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $x+ y-5=0$.

4. Вычислить тройной интеграл $\iiint_T (x + y)dxdydz$ по области T, ограниченной поверхностями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=-1$, $z=1$.

5. Вычислить криволинейный интеграл по координатам: $\int\limits_L (2-y)dx+xdy,$ L – арка циклоиды $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ \ 0\le t\le 2\pi.$

6. Показать, что интеграл $\oint\limits_C 2y\cos xdy - y^2\sin xdx$ по любому замкнутому контуру C, содержащемуся в односвязной области D, равен нулю.

***Вариант* 2.**

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy,$ где область D ограничена линиями $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}.$

2. Вычислить в полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax.$

3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4,\ \ x+y=2.$

4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T z\sin(x+y)dxdydz,$ где область T ограничена поверхностями $x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=\pi,\ z=0,\ z=1.$

5. Вычислить криволинейный интеграл по координатам: $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy,$ L - окружность $x^2+y^2=4.$

6. Показать, что интеграл $\oint\limits_C \sin^2 ydx + x\sin 2ydy$ по любому замкнутому контуру C содержащемуся в односвязной области D, равен нулю.

***Вариант* 3.**

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2x-y)dxdy,$ где область D ограничена линиями $y=x^2,\ y=4.$

2. Вычислить в полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=a^2.$

3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $xy=e,\ y=e^x,\ y=1.$

4.Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T (x+y+z)^2dxdydz,$ где область T ограничена поверхностями: $x+y+z=1,\ x=0.\ y=0,\ z=0.$

5. Вычислить криволинейный интеграл по координатам: $\int\limits_L (4x+y)dx+(x+4y)dy,$ L – дуга параболы $y=x^4$ от точки $A(1;\,1)$ до точки $B(-1;\,1)$.

6. Показать, что интеграл $\oint\limits_N 2x\ln ydx+\frac{x^2}{y}dy$ по любому замкнутому контуру C, содержащемуся в одно связной области D, равен нулю.

***Вариант* 4.**

1 Вылить двойной интеграл $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy,$ где область D ограничена линиями $x=0,\ y=x,\ \ ó=\frac{\pi}{2}.$

2 Вычислить в полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$ где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1.$

3 Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x},\ x=4,\ y=0.$

4Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T (xy+z)dxdydz,$ где область T ограничена поверхностями $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=3.$

5 Вычислить криволинейный интеграл по координатам: $\int\limits_L ydx+2xdy,$ L – дуга параболы $y=x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(2, 8)$.

6 Показать. что интеграл $\oint\limits_C (3x^2y+2y^3)dx+(x^3+6xy^2)dy$ по любому замкнутому контуру C, содержащемуся в односвязной области D, равен нулю.

Контрольная работа 7 (раздел 17)

***Вариант* 1.**

1.Исходя из определения сходимости, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}.$

2.По необходимому признаку сходимости, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{n^2+2n}{n^3+3}.$

3.Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7}{n^5}$ по первому признаку сравнения.

4.Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+5n^2}{n^4+1}$ по второму признаку сравнения.

5.Исследовать сходимость рядов, используя признаки сходимости Даламбера или Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}.$

6.Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!4^n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2\sqrt{n}+3}.$

***Вариант* 2.**

1.Исходя из определения, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$

2.По необходимому признаку исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$

3.Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n\sqrt{n^3}}$ по первому признаку сравнения.

4.Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{2n^4+3}$ по второму признаку сравнения.

5.Исследовать сходимость рядов, используя признаки сходимости Даламбера или Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{2^{n-1}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$

6.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)3^n}.$

***Вариант* 3.**

1.Исходя из определения, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}.$

2.По необходимому признаку исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+3}{n+1}.$

3.Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ по первому признаку сравнения рядов.

4.Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ по второму признаку сравнения.

5.Исследовать сходимость рядов, используя признаки сходимости Даламбера или Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(n+1)!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n+2}$.

6.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{5n^3+4}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^4}$.

***Вариант* 4.**

1.Исходя из определения, исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+2)}$.

2.По необходимому признаку исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$.

3.Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-3}$ по первому признаку сравнения.

4.Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^6+1}$ по второму признаку сравнения.

5.Исследовать сходимость рядов, используя признаки сходимости Даламбера или Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n+1)}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$.

6.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n(2^n+3)}$.

Контрольная работа 8 (раздел 18)

***Вариант* 1.**

1.Найти область сходимости и предельную функцию функциональной последовательности $f_n(x)=\frac{n^2}{n^2(x^2+1)+x}$.

2.Найти области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{x}{2^n}$.

3.Доказать, что ряды сходятся равномерно в указанных промежутках:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$, $(0, 2)$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2x^2+n}$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

***Вариант* 2.**

1.Найти область сходимости и предельную функцию функциональной последовательности $f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}$.

2.Найти области сходимости функциональных рядов: *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^2}{2+n^3x^3}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2+1}$.

3.Доказать, что ряды сходятся равномерно в указанных промежутках:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3e^{n^3x^3}}$, $(-\infty,+\infty)$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$, $(-\infty,+\infty)$.

***Вариант* 3.**

1.Найти область сходимости и предельную функцию функциональной последовательности $f_n(x)=\frac{n}{2^{nx^2}}$.

2.Найти области сходимости функциональных рядов:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+x^3}{n}\right)^n$; $\quad б)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{nx}}$.

3.Доказать, что ряды сходятся равномерно в указанных промежутках:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2x^2+n}$, $\quad [0,1]$. $\quad б)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\cos nx}{3^n}$, $\quad (-\infty,+\infty)$.

***Вариант* 4.**

1.Найти область сходимости и предельную функцию функциональной последовательности $f_n(x)=\frac{nx}{nx^2+1}$.

2.Найти области сходимости функциональных рядов:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n\cos x}}$; $\quad б)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{3x+5^n}$.

3.Доказать, что ряды сходятся равномерно в указанных промежутках:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, $\quad (-\infty,+\infty)$; $\quad б)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$, $\quad [-1,1]$.

Контрольная работа № 9 (разделы 19 и 20)

***Вариант* 1.**

1.Найти области сходимости степенных рядов: $a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$; $\quad б)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)!}$.

2.Разложить функции в степенные ряды по степеням x, используя известные разложения элементарных функций. Найти радиус сходимости полученного ряда:

$a)\ f(x)=x\ln(1+x^2)$; $\quad б)\ f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

3.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x^2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

***Вариант* 2.**

1.Найти области сходимости степенных рядов: $a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n^2}}{n^n}$; $\quad б)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-x)^{2n}}{\sqrt{n}}$.

2.Разложить функции в степенные ряды по степеням x, используя известные разложения элементарных функций. Найти радиус сходимости полученного ряда:

$a)\ f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad б)\ f(x)=\frac{1}{2x^2+5x=3}$.

3.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

***Вариант* 3.**

1.Найти области сходимости степенных рядов: $a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$

2.Разложить функции в степенные ряды по степеням x, используя известные разложения элементарных функций. Найти радиус сходимости полученного ряда:

а) $f(x)=x\sin^2 x$; *б*) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

3.Разложить в ряд Фурье функции $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

***Вариант* 4.**

1.Найти области сходимости степенных рядов: *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$.

2.Разложить функции в степенные ряды по степеням x, используя известные разложения элементарных функций. Найти радиус сходимости полученного ряда:

а) $f(x)=x^2e^{-2x}$; *б*) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x-6}$.

3.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0,\\ \frac{x^2}{\pi}, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Контрольная работа №1 (Пятый семестр).

Вариант первый

1.Найти и построить область определения функции $z=\sqrt[3]{x+y}+\arccos(xy)$.

2.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

3.Исследовать на локальный экстремум функцию $z=x^2+xy+2y^2-3x-6y$.

5.Вычислить в прямоугольных координатах интеграл $\iint_D(x+2y)dxdy,$ по области D, ограниченной линиями $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}$

6.Вычислить интеграл $\iint_D ydxdy,$ если область D – полукруг $(x-a)^2+y^2\le a^2,\ \ y\ge 0$.

7.Вычислить интеграл $\iiint_T xdxdydz,$ по области D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $x^2\le z\le x$.

8.Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_L ydx-x^2dy$ по линии L:

$y=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ -x+2, & 1\le x\le 2\end{cases}$ от начала координат до точки $M2$; 0).

9.Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_L\frac{dl}{x-y}$ по прямой x-2y-4=0 от точки M(0; –2) до точки N(4; 0).

Вариант второй.

1.Найти и построить область определения функции $z = 2^{\sin x} + \sqrt{\ln(y+x)}$.

2.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

3.Исследовать на локальный экстремум функцию $z = xy^2 - x^2y^2 - xy^3$, $x>0$, $y>0$.

4.Вычислить в прямоугольных координатах интеграл $\iint_D xy\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x+2y=2$, $2y-x=2$.

5.Вычислить интеграл $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, если область D ограничена линиями $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0$.

6.Вычислить интеграл $\iiint_T (1+2y)\,dxdydz$ по области T: $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3-x$, $0\le z\le 1$.

7.Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\int_L xdx + ydy$ по линии

$y = \begin{cases} e^x, & -1\le x\le 0, \\ 1, & 0\le x\le 2 \end{cases}$ от точки $M(-1;\, e^{-1})$ до точки $N(2;\, 1)$.

8.Найти функцию $w(x, y)$ по её полному дифференциалу $dw=6xy^2dx+(6x^2y+3y^2)dy$.

9.Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ по первой четверти окружности $x=r\cos t$, $y=r\sin t$.

***Вариант третий*.**

1.Найти и построить область определения функции $z = \sqrt[4]{y-(x-1)^2}$.

2.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z = e^{xy}$.

3.Исследовать на локальный экстремум функцию $z=2x^2+xy-y^2-x-3y$.

4.Вычислить в прямоугольных координатах интеграл $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$, $x+y=2$, $y=0$.

5.Вычислить интеграл $\iint_D \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\,dxdy$ в полярных координатах по области D, ограниченной полуокружностью $x^2+y^2=1$ и осью ординат, $x \ge 0$.

6.Вычислить интеграл $\iiint_T yx\,dxdydz$ по области D: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, $y^2\le z\le y$.

7.Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xdy$ по координатам по линии

$y = \begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0, \\ 1-\frac{x}{3}, & 0\le x\le 3 \end{cases}$ от точки $M(-1;\, 0)$ до точки $N(3;\, 0)$.

8.Найти функцию $w(x, y)$ по её полному дифференциалу $dw=2xdx+\cos y dy$.

9.Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_L ydl$ по параболе $y=\frac{1}{3}x^3$ от начала координат до точки $Ì\left(1;\, \frac{1}{3}\right)$.

Вариант четвертый.

1.Найти и построить область определения функции $z=\mathrm{arc}tg(y-x^3)$.

2.Найти полные дифференциалы первого и второго порядков функции $z=\sin^2(xy)$.

3.Исследовать на локальный экстремум функцию $z=x^2+6xy+y^2-2x-38y$.

4.Вычислить в прямоугольных координатах интеграл $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=y^2$, $x=1$.

5.Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ в полярных координатах по области D, ограниченной окружностью $x^2+(y+2)^2=4$.

6.Вычислить интеграл $\iiint\limits_T (1+2z)dxdydz$ по области D: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 2-x$.

7.Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L ydx$ по координатам по линии

$$y=\begin{cases} 2x^3, & 0\le x\le 1, \\ -x+3, & 1\le x\le 3 \end{cases}$$ от начала координат до точки $M(3{:}\ 0)$.

8.Найти функцию $w(x, y)$ по её полному дифференциалу $dw=-\sin x dx+2ydy$.

9.Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$ по прямой $x-y+2=0$ от точки $M(2; 4)$ до точки $N(1; 3)$.

Контрольная работа № 2 (Шестой семестр)

Вариант первый.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды: *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{n^3-4n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$; *г*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+5}\right)^n$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2^n}$ на отрезке $[-1, 1]$ на равномерную сходимость.

5. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(2n+1)}$.

6. Написать разложение функции $f(x)=\mathrm{arctg}x$ в ряд Маклорена.

Вариант второй.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды: *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\,3^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n+2}$; *г*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+nx}{n}\right)^n$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$ на равномерную сходимость.

5. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$.

6. Найти первые пять членов разложения функции $f(x)=\ln(x^2+1)$ в ряд Маклорена.

Вариант третий.

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды: *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n-1}{n^2+7}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^3}+n}$; *г*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{5^n}$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

4. Исследовать в промежутке $(-\infty, 0]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{nx}}{n^3}$ на равномерную сходимость.

5. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$.

6. Найти разложение функции $f(x)=\cos 3x$ в ряд Маклорена.

Вариант четвертый.

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды: *а*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n+5}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,tg\frac{\pi}{3^n}$; *г*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{x^3+1}$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$ на равномерную сходимость.

5. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

6. Найти первые пять членов разложения функции $f(x)=\mathrm{ctg}x$ в ряд Тейлора по степеням $x-\frac{\pi}{2}$.

Примерные тестовые задания.

I. тесты по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»..

Вариант №1

1. Производная функции $y = |x-1|$ в точке $x = 1$

1) не существует; 2) равна $+\infty$; 3) равна 0.

2. Из дифференцируемости функции в данной точке вытекает, что в этой точке она

1) непрерывна и имеет конечную производную;
2) непрерывна, но может иметь бесконечную производную;
3) непрерывна и может не иметь производной.

3. Если $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, то в точке $x = 0$ функция $f(x)$

1) непрерывна, но не имеет производной;
2) непрерывна и имеет односторонние производные;
3) дифференцируема.

4. Производная функции $cos^2 3x$ равна

1) $-6\sin 3x$; 2) $6\cos 3x$; 3) $-3\sin 6x$; 4) $-2\cos 3x \sin 3x$.

5. Производная функции $\sin\pi\sqrt{x}$ в точке $x = 1$ равна

1)0; 2) $-\pi$; 3) $-\frac{\pi}{2}$.

6. Уравнением горизонтальной касательной к графику функции $f(x) = e^x + e^{-x}$ служит

1) $y = 1$; 2) $y = 3$; 3) $y = 2$.

7. Дифференциал функции $e^{\sin x}$ в точке $x = 0$ равен

1) 0; 2) dx; 3) не существует.

8. Если дифференцируемая на данном отрезке функция имеет на нем три различных нуля, то ее производная на этом отрезке

1) имеет хотя бы два нуля; 2) всегда имеет три нуля; 3) может не иметь ни одного нуля.

9. Найти абсциссы всех точек, в которых касательная к графику функции $f(x) = x^3 - 2x - 1$ перпендикулярна прямой $y = -x$.

1) 1; 2) ± 1; 3) -1.

10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

1) 1; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$.

11. Найти стационарные точки функции $y = \arcsin x^2$.

1) π; 2) 0; 3) ± 1.

12. Найти промежутки убывания функции $y = x^2 e^{-x}$

1) $[0,2]$; 2) $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$; 3) $(-\infty,+\infty)$.

13. Найти точки экстремумов функции $y = xe^{-x}$.

1) 0; 2) 1; 3) -1.

14. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1) не существует; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = x^2 \ln x$.

1) $e^{-1,5}$; 2) e^{-1}; 3) e.

Вариант №2.

1. Функция $y = |x| + 1$ в точке $x = 0$

1) имеет производную; 2) дифференцируема; 3) имеет односторонние производные.

2. Функция $y=\sqrt[5]{x-2}$ в точке $x=2$

1) имеет производную и дифференцируема;

2) имеет производную, но не дифференцируема;

3) непрерывна и дифференцируема.

3. Найти правую производную функции $|\sin x|$ в точке π.

1) 1; 2) 0; 3) -1.

4. Пусть $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Тогда производная функции $f(x)$ в точке $x=0$

1) равна 1; 2) равна 0; 3) не существует.

5. Производная функции $x^{\ln x}$ равна

1) $2\ln x\cdot x^{\ln x-1}$; 2) $x^{\ln x}\ln x$; 3) $x^{\ln x-1}\ln x$; 4) $\ln x\cdot x^{\ln x-1}$.

6. Найти абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $f(x)=x^3-3x^2+4$ параллельна прямой $y=-3x$.

1) 0; 2) -1; 3) 1.

7. Графики функций $y=x^2$ и $y=x^3$ имеют общие касательные

1) лишь в точке $x=0$; 2) в точках $x=0$ и $x=\frac{2}{3}$; 3) в точках $x=0$ и $x=1$.

8. Если дифференцируемая на данном отрезке функция имеет на нем три различных нуля, то ее производная на этом отрезке

1) имеет хотя бы два нуля; 2) всегда имеет три нуля; 3) может не иметь ни одного нуля.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5^x-5}{x-1}$

1) $5\ln 5$; 2) $\ln 5$; 3) 5.

10. Для строгого возрастания дифференцируемой функции на интервале

1) необходимо и достаточно, чтобы ее производная была строго положительной на этом интервале;

2) необходима строгая положительность ее производной на этом интервале;

3) достаточна строгая положительность ее производной на этом интервале.

11. Найти промежутки убывания функции $y=x^2e^{-x}$

1) $[0,2]$; 2) $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$; 3) $(-\infty,+\infty)$.

12. Найти промежутки возрастания функции $y=x\ln x$.

1) $[1,+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$; 3) $(e,+\infty]$.

13.Найти точки экстремумов функции $2x+\cos x$.

1) не существуют; 2) $\pi n,\ n\in z$; 3) 0.

14. Найти промежутки выпуклости (вниз) функции $y=x+\frac{1}{x}$.

1) $(0,+\infty)$; 2) $(1;+\infty)$; 3) $(-\infty,0)$.

15. Найти точки перегиба графика функции $arctgx$.

1) 0; 2) ± 1; 3) 1.

Вариант№3

1. Функция $f(x)=|x-3|$ в точке $x=3$

1) непрерывна и имеет односторонние производные;

2) непрерывна и имеет производную;

3) непрерывна и дифференцируема.

2. Пусть $f(x)=\cos x$ при $x\leq 0$ и $f(x)=x^2+1$ при $x>0$. Тогда функция $f(x)$

1) дифференцируема в точке $x=0$;

2) не имеет производной;

3) непрерывна, но не дифференцируема.

3. Найти производную функции $f(x)=x^x$ в точке $x=1$.

1) e; 2) 0; 3) 1.

4. Найти абсциссы всех точек, в которых касательная к графику функции $f(x)=x^3-2x-1$

перпендикулярна прямой $y=-x$.

1) 1; 2) ± 1; 3) -1.

5. Угол между касательными к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^3$ в точке с абсциссой $x=1$ равен

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $arctg\frac{2}{3}$; 3) $arctg\frac{1}{7}$; 4) $arctg\frac{1}{6}$.

6. Найти значения x, при которых касательные к графикам функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{3}x^3$

в точках с абсциссой x взаимно перпендикулярны.

1) $x=-1$; 2) $x=0$; 3) $x=\frac{2}{3}$.

7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f(a)=f(b)$. Тогда

1) всегда $f(x)$ имеет хотя бы один строгий локальный экстремум на (a,b);

2) всегда $f'(x)=0$ хотя бы в одной точке из (a,b);

3) всегда $f'(x)=0$ хотя бы в двух точках из $[a,b]$.

8. Производная функции $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ имеет

1) три нуля на отрезке $[1;3]$; 2) два нуля на отрезке $[1;3]$; 3) не имеет нулей на $[1;3]$.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}$

1) $\ln 5$; 2) 0; 3) 1.

10. Найти промежутки возрастания функции $y=x\ln x$.

1) $[1,+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$; 3) $(e,+\infty]$.

11. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 и $f''(x_0)>0$. Тогда

1) x_0 - точка локального минимума $f(x)$;

2) x_0 - точка локального максимума $f(x)$;

3) $f(x)$ может не иметь экстремума в точке x_0.

12. Найти точки экстремумов функции $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

1) $x=1$; 2) $x=e$; 3) не существует.

13. Найти промежутки возрастания функции $f(x)=\lg(x^2+x+1)$.

1) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$; 2) $(-\infty,+\infty)$; 3) $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

14. Найти промежутки выпуклости вверх функции $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3$.

1) $[0,1]$; 2) $(-\infty,0]$ и $[1,+\infty)$; 3) $(-\infty,+\infty)$.

II. Тесты по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной».

Вариант №1

1. Определите к какому табличному интегралу относится интеграл $\int \frac{dx}{2x}$.

а) $\int u^n du,$ б) $\int \frac{du}{u}$, в) $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$, г) $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$

2. Какие из следующих интегралов можно найти методом замены переменной?

а) $\int \frac{dx}{2x+3},$ б) $\int x^2 \ln x dx,$ в) $\int (x+1)\cos x dx,$ г) $\int x arctgx dx.$.

3. Какие из следующих интегралов берутся методом интегрирования по частям?

а) $\int x^2 \sin x dx,$ б) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx,$ в) $\int \frac{x^2 dx}{a + x^3};$ г) $\int \frac{dx}{\cos^2 (ax+b)}$.

4. Выясните, к какому из табличных интегралов сводится интеграл $\int \frac{dx}{2x+3}$:

а) $\int u^n du,$ б) $\int \frac{du}{u},$ в) $\int \frac{du}{u^2 + a^2}$; г) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$; д) $\int \cos u du.$

5. С помощью какого метода находится следующий интеграл $\int \frac{arctg 3x}{1 + 9x^2} dx.$

а) методом замены переменной;
а) методом интегрирования по частям;
в) выделением полного квадрата;
г) методом неопределенных коэффициентов;
д) использованием тригонометрических формул.

6. Допишите, какие обозначения следует сделать при применении формулы интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$ к интегралу вида $\int x arctgx dx$.

а) $u = x, \quad dv = arctgx dx,$ б) $u = x dx, \quad dv = arctgx,$
в) $u = arctgx, \quad dv = x dx,$ г) $u = x arctgx, \quad dv = dx.$

7. Выберите подстановку, с помощью которой берется интеграл $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

а) $t = x^2,$ б) $t = \sqrt{x},$ в) $t = x^6,$ г) $t = \sqrt{x^3}.$

8. Какой вид будет иметь подынтегральная дробь интеграла $\int \frac{dx}{(x-2)\,(x^2+5)}$ после разложения ее на сумму простейших дробей.

а) $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2+5}$, б) $\frac{Ax+B}{x-2} + \frac{C}{x^2+5}$, в) $\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+5}$, г) $\frac{Ax+B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+5}$.

9. Найти интеграл $\int (7 - 2x)^3 dx.$

а) $-\frac{1}{2}(7-2x)^4 + C,$ б) $\frac{1}{7}(7-2x)^4 + C,$ в) $-\frac{1}{8}(7-2x)^4 + C,$ г) $(7-2x)^3 d(7-3x).$

10. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 6t - 12.$

Найти скорость движения точки.

а) $v=6,$ б) $v=3t^2-12t+C,$ в) $v=6t^2-12t+C,$ г) $v=t^3-4t^2+C.$

11. Чему равен интеграл $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$?

а) $\frac{\pi}{6}$, б) $-\frac{\pi}{4}$, в) $\frac{5\pi}{6}$, г) $-\frac{\pi}{2}$.

12. Чему равен интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin x dx}{1+\cos x}$?

а) $\ln\frac{2}{3}$, б) $-\ln\frac{3}{2}$, в) $\frac{3}{7}$, г) $-\frac{\pi}{6}$.

13. Чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2,\quad x^2=y$?

а) $\frac{2}{3}$ (кв. ед.), б) $\frac{1}{6}$ (кв. ед.), в) $1\frac{1}{2}$ (кв. ед.), г) $1\frac{1}{3}$ (кв. ед).

14. Скорость движения точки $v=(3t^2+2t+1)\,{}^{м}\!/_{c}$. Чему равен путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения ?

а) 1000(м), б) 1100(м) , в) 1110(м), г) 2002(м).

15. Найдите объем фигуры, образованной вращением площадей, ограниченных линиями $x^2+y^2=r^2,\quad y=0$ вокруг оси Ox.

а) $\frac{4\pi r r^2}{3}$ (куб. ед.), б) $\frac{4\pi r r^3}{3}$ (куб. ед.), в) $3\pi r r^3$ (куб. ед.), г) $3\pi r r^3$ (куб. ед.).

Вариант №2

1. Определите к какому табличному интегралу относится интеграл $\int\frac{dx}{(x+1)^2}$.

а) $\int u^n du,$ б) $\int\frac{du}{u}$, в) $\int\frac{du}{u^2-a^2}$, г) $\int\frac{du}{u^2+a^2}$.

2. Какие из следующих интегралов можно найти методом замены переменной?

а) $\int\frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}},$ б) $\int\frac{\ln x}{x}dx,$ в) $\int x\sin x dx,$ г) $\int x^2\ln x dx.$

3.Какие из следующих интегралов берутся методом интегрирования по частям?

а) $\int x\ e^x dx,$ б) $\int x\ e^{x^2}dx,$ в) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$, г) $\int tgx dx.$

4. Выясните, к какому из табличных интегралов сводится интеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$;

а) $\int u^n du$, б) $\int \frac{du}{u}$, в) $\int \frac{du}{u^2+a^2}$; г) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$; д) $\int \cos u du$.

5. С помощью какого метода находится следующий интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$.

а) методом замены переменной;
а) методом интегрирования по частям;
в) выделением полного квадрата;
г) методом неопределенных коэффициентов;
д) использованием тригонометрических формул.

6. Допишите, какие обозначения следует сделать при применении формулы интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$ к интегралу вида $\int x \ln 3x dx$.

а) $u = x, \quad dv = \ln 3x dx$, б) $u = x dx, \quad dv = \ln 3x$,
в) $u = \ln 3x, \quad dv = x dx$, г) $u = x \ln 3x, \quad dv = dx$.

7. Выберите подстановку, с помощью которой берется интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$.

а) $t = x^2$, б) $t = \sqrt{x+2}$, в) $t = \sqrt{x+2}+3$, г) $t = x+2$.

8. Какой вид будет иметь подынтегральная дробь интеграла $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+3)}$ после разложения ее на сумму простейших дробей.

а) $\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2}\frac{C}{x+3}$, б) $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$, в) $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{(x+3)^2}$, г) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$.

9. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$.

а) $\frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1}$, б) $\frac{1}{3}\ln(e^{2x}+1)+C$, в) $\frac{1}{2}\ln(e^{x}+1)+C$, г) $\ln(e^{x}+1)+C$.

10. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 - 2t$.
Найти закон ее движения S.

а) $s = t^3 - t^2 + C$, б) $s = t^2 - t^3 + C$, в) $s = 6t - 2$, г) $s = 6t$.

11. Чему равен интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$?

а) $\frac{\pi}{6}$, б) $-\frac{\pi}{4}$, в) $-\frac{\pi}{2}$, г) $\frac{\pi}{4}$.

12. Чему равен интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$?

а) $\frac{2}{5}$, б) $-\frac{3}{2}$, в) $\frac{3}{4}$, г) $\frac{\pi}{2}$.

13. Чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, \quad y = 2x$?

а) 3 (кв. ед.), б) $\frac{2}{3}$ (кв. ед.), в) $2\frac{1}{2}$ (кв. ед.), г) $1\frac{1}{3}$ (кв. ед).

14. Скорость движения точки $v = (12t - 3t^2)\, м/с$. Чему равен путь, пройденный точкой за от начала движения до ее остановки?

а) 24(м), б) 16(м) , в) 46(м), г) 32(м).

15. Найдите объем фигуры, образованной вращением площадей, ограниченных линиями $x + 2y - 4 = 0, \quad y = 0, \quad x = 0$ вокруг оси Ox.

а) $5\frac{1}{3}\pi$ (куб. ед.), б) $2\frac{1}{4}\pi$ (куб. ед.), в) 3π (куб. ед.), г) 9π (куб. ед.).

Вариант №3

1. Определите к какому табличному интегралу относится интеграл $\int\frac{xdx}{x^4-4}$.

а) $\int u^n du$, б) $\int\frac{du}{u}$, в) $\int\frac{du}{u^2-a^2}$, г) $\int\frac{du}{u^2+a^2}$.

2. Какие из следующих интегралов можно найти методом замены переменной

а) $\int\frac{xdx}{x^2+1}$, б) $\int x\ln xdx$, в) $\int x\arcsin xdx$, г) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$.

3.Какие из следующих интегралов берутся методом интегрирования по частям?

а) $\int\frac{dx}{25+x^2}$; б) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$; в) $\int x\sin 3xdx$; г) $\int x^3\cos x^4dx$.

4. Выясните, к какому из табличных интегралов сводится интеграл $\int\frac{\cos\ln xdx}{x}$.

а) $\int u^n du$, б) $\int\frac{du}{u}$, в) $\int\frac{du}{u^2+a^2}$; г) $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$; д) $\int\cos udu.$.

5. С помощью какого метода находится следующий интеграл $\int\cos 3x\cos 7xdx$.

а) методом замены переменной;
б) методом интегрирования по частям;
в) методом неопределенных коэффициентов;
г) использованием тригонометрических формул.

6. Допишите, какие обозначения следует сделать при применении формулы интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$ к интегралу вида $\int x^2\sin 2xdx$.

а) $u=x^2$, $dv=\sin 2xdx$, б) $u=x^2dx$, $dv=\sin 2x$,
в) $u=\sin 2x$, $dv=x^2\ dx$, г) $u=x^2\sin 2x$, $dv=dx$.

7. Выберите подстановку, с помощью которой берется интеграл $\int\frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$.

а) $t=x^3$, б) $t=\cos^2 x^3$, в) $t=\cos x^3$, г) $t=\cos^2 x$.

8. Какой вид будет иметь подынтегральная дробь интеграла $\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ после разложения ее на сумму простейших дробей.

а) $\frac{A}{x^2}+\frac{C}{x+2}$, б) $\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}$, в) $\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+2)^2}$, г) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$.

9. Найти интеграл $\int\frac{x^2dx}{a^2+x^6}$.

а) $\frac{d(a^2+x^6)}{a^2+x^6}$, б) $\frac{1}{a}arctg\frac{x^3}{a}+C$ в) $\frac{1}{3a}arctg\frac{x^3}{a}+C$ г) $\frac{1}{a}arctg\frac{x^6}{a^2}+C$.

10. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v=3t^2-8t+2$. Найти закон ее движения S.

а) $s=6t$, б) $s=t^3-2t^2+2t+C$, в) $s=6t-8$, г) $s=t^3-4t^2+t+C$.

11. Чему равен интеграл $\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$?

а) $\frac{1}{2}$, б) 0, в) **1**, г) **– 1**.**12.**

12. Чему равен интеграл $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$?

а) 24, б) 49, в) -36, г) 68.

13. Чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x, \quad y \ge 0, \quad x = 1, \quad x = 4$?

а) 4 (кв. ед.), б) $4\frac{2}{3}$ (кв. ед.), в) $5\frac{1}{2}$ (кв. ед.), г) 5,5 (кв. ед).

14. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)\, м/с$. Чему равен путь, пройденный точкой за 4 – ю секунду?

а) 62(м), б) 77(м) , в) 83(м), г) 94(м) .

15. Найдите объем фигуры, образованной вращением площадей, ограниченных линиями $y^2 = 4x, \quad y = 0, \quad и \quad x = 4$ вокруг оси Ox.

а) 32π (куб. ед.), б) 12π (куб. ед.), в) 16π (куб. ед.), г) 24π (куб. ед.).

III. Тесты по разделу «Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

1. Определить вид множеств

а) $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1,\ y-x>0\}$; *б)* $D=\{(x,y)|\ e^x \le y < -x^2+2)$:

Ответы:

1) оба множества открытые и ограниченные; 2) оба множества замкнутые и ограниченные; [3)] множество *а*) открытое и ограниченное, множество *б*) ограниченное, но неоткрытое и незамкнутое; 4) множество *а*) открытое и ограниченное, множество *б*) замкнутое и неограниченное; 5) оба множества замкнутые и неограниченные; 6) оба множества открытые и неограниченные.

2. Найти область определения функции $z = \ln\sqrt{y - x^2}$.

Ответы: 1) $y \ge x^2$; 2) $y \ne x^2$; 3) $x>0,\ y>0$; 4) $\sqrt{y - x^2} > 0$; [5)] $y > x^2$; 6) $\forall x \in R,\ y>0$.

3. Предел $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 y^2}$ равен:

Ответы: 1) ∞; 2) 1; 3) не существует; [4)] 0.

4. Предел функции $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ в точке (0; 0) равен:

1) ∞; 2) 0; 3) 5; [4)] не существует.

5. Повторные пределы функции $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 y^4}$ в точке (0; 0) равны:

Ответы: 1) 0 и ∞; [2)] ∞ и ∞; 3) 0 и 1; 4) 2 и 2.

6. Предел функции $z = (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ в точке (∞; ∞) равен:

Ответы: 1) не существует; 2) 0; [3)] 1; 4) ∞.

7. Повторные пределы функции $z=\dfrac{x}{x+y}$ в точке (0; 0) равны:

Ответы: [1)] 0 и 1; 2) 2 и –3; 3) 0 и ∞; 4) ∞ и ∞.

8. Частные производные первого порядка функции $z=\mathrm{tg}(x^2+y)$ в точке $(0;\pi)$ равны:

Ответы:

[1)] $z'_x(0;\pi)=0,\quad z'_y(0;\pi)=1;$ 2) $z'_x(0;\pi)=1,\quad z'_y(0;\pi)=0;$

3) $z'_x(0;\pi)=0,\quad z'_y(0;\pi)=0;$ 4) $z'_x(0;\pi)=1,\quad z'_y(0;\pi)=1.$

9. Найти дифференциал первого порядка функции $z=y\sin x-x^3+y^3$ в точке (0; 1):

Ответы:

1) $dz(0;1)=5dx+2dy;$ 2) $dz(0;1)=dx+dy;$

[3)] $dz(0;1)=dx+3dy;$ 4) $dz(0;1)=dx-dy.$

10. Найти дифференциал второго порядка функции $z=xy+x\sin y$ в точке (0;0):

Ответы:

1) $d^2z(0;0)=dx^2+2dxdy+dy^2;$ [2)] $d^2z(0;0)=2dxdy;$

3) $d^2z(0;0)=2dx^2-dy^2;$ 4) $d^2z(0;0)=0.$

11. Найти дифференциал первого порядка функции $z=x^y$ в точке $(e;1)$:

Ответы:

[1)] $dz(e;1)=dx+edy;$ 2) $dz(e;1)=7dx+dy;$

3) $dz(e;1)=dx+dy;$ 4) $dz(e;1)=edx-dy;$

12. Смешанная производная z'''_{xy} функции $z=\cos^2(x+y)$ в точке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна:

Ответы:

[1)] $z'''_{xy}\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)=2;$ 2) $z'''_{xy}\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)=1;$ 3) $z'''_{xy}\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)=-3;$ 4) $z'''_{xy}\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)=3.$

13. Смешанная производная z'''_{xy} функции $z=xy\ln(xy)$ равна:

Ответы:

1) $1-\ln(xy);$ 2) $xy;$ 3) $y+\ln(xy);$ [4)] $2+\ln(xy).$

14. Производная неявной функции $y=y(x)$, определенной уравнением $\ln(x^2+y^2)=a$, равна:

Ответы:

1) $y'_x=-\dfrac{x}{x^2+y^2};$ [2)] $y'_x=-\dfrac{x}{y};$ 3) $y'_x=-\dfrac{y}{x};$ 4) $y'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}.$

15. Частная производная по x неявной функции $z=z(xy)$, определенной уравнением $xz+z^2+x^2+y^3=0$, равна:

Ответы:

[1)] $z'_x = -\dfrac{z+2x}{x+2z}$;   2) $z'_x = -\dfrac{z+2y}{z-2y}$; 3) $z'_x = -\dfrac{z-2x}{x+2z}$;   4) $z'_x = \dfrac{2y}{z+2y}$.

16. Найти сумма частных производных z'_x, z'_y функции $z = x^{2y}$ в точке (1; 1) равна:

Ответы:

1) 3;   2) $\dfrac{1}{2}$;   3) 1;   [4)] 2.

17. Функция $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ имеет минимум в точке:

Ответы: 1) ((1; 2); 2) (0; –1); [3)] (1; 1);   4) (–1;0).

18. Функция $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 1$ имеет максимум в точке:

Ответы:

1) (1; 2); [2)] (2;1); 3) (0; 2); 4) не имеет максимума.

19. Стационарная точка функции $z = \dfrac{\ln x}{y} + x$ имеет следующие координаты:

Ответы:

[1)] (1; –1); 2) (2; 2); 3) (–1; 1); 4) (–1; 2).

20. Функция $z = xy$ имеет:

Ответы:

1) одну точку максимума (0; 0);

2) одну точку минимума (0; 0);

3) бесконечное множество точек экстремума;

[4)] не имеет точек экстремума.

21. Экстремум функции $z = e^{\frac{y}{2}}(x^2 + y)$ равен:

Ответы:

1) 4; 2) $4e^2$; [3)] $-2e^{-1}$; 4) $6e^3$.

22. При каких значениях a и b функция $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 7$ имеет минимум в точке $(a; b)$?

Ответы:

1) при семи значениях a и b;

[2)] при любых значениях a и b;

3) при значениях $a = 1$, $b = 2$;

4) ни при каких значениях a и b.

23. Предел функции $z = \dfrac{x^4 + y^2}{x^2 + y^4}$ в точке $(\infty; \infty)$ равен:

Ответы:

1) 0; 2) 4^{-1}; 3) ∞; [4)] не существует.

24. Функция $z=x^2+y^2-2x-6y$ при условии $y-x=0$ имеет условный экстремум в точке:

Ответы:

[1)] (2; 2); 2) (1; 2); 3) (0; 3); 4) (2; 3).

25. Функция $z=x^3-y$ при условии $y-x^2=0$ имеет стационарные точки:

Ответы:

1) (0; 0) и (2; 2); 2) (–1; 3) и (0; 5); 3) $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{9}\right)$ и (1; 1); [4)] (0; 0) и $\left(\frac{2}{3};\frac{4}{9}\right)$

26. При каких значениях a верно равенство $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x-a^2y)}{x+ay}=1$?

Ответы:

1) $a=1$ и $a=2$; [2)] $a=0$ и $a=-1$; 3) $a=1$ и $a=-2$; 4) не существует такого значения a.

27. При каких значениях n функция $z=\sqrt[n]{x^2+y-1}+\ln(x^4+3)^y$ определена на всей плоскости?

Ответы:

1) Функция не определена ни при каком значении n;

2) при четном n;

[3)] при нечетном n;

4) при любом $n\in N$.

28. Функция $z=f(x;y)$, имеющая в точке $M_0(x_0;y_0)$ обе частные производные первого порядка:

Ответы:

1) непрерывна в точке M_0;

2) дифференцируема в точке M_0;

3) не может быть дифференцируемой в точке M_0;

[4)] может быть как дифференцируемой, так и не дифференцируемой в точке M_0.

29. Функция $f(x;y)$, для которой $M_0(x_0;y_0)$ является точкой разрыва:

Ответы:

1) имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ обе частные производные первого порядка;

[2)] может иметь в точке $M_0(x_0;y_0)$ обе частные производные первого порядка;

3) не имеет ни одной частной производной в точке $M_0(x_0;y_0)$;

4) дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0)$.

30. Какие из следующих теорем верные?

Теорема 1. Если функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 2. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в точке $(x_0;y_0)$, то она дифференцируема в этой точке.

Теорема 3. Если функция $f(x; y)$ не дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, то она не является непрерывной в этой точке.

Теорема 4. Если $(x_0;y_0)$ – точка разрыва функции $f(x; y)$, то она не дифференцируема в этой точке.

Ответы:

1) первая и вторая теоремы верные;

2) все теоремы верные;

3) вторая и третья теоремы верные;

4) вторая и четвертая теоремы верные;

[5)] первая и четвертая теоремы верные;

6) все теоремы неверные.

31. Какие из следующих теорем верные?

Теорема 1. Если функция $f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ обе частные производные первого порядка, то она дифференцируема в этой точке.

Теорема 2. Если функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке M_0, то она имеет в этой точке обе частные производные первого порядка.

Теорема 3. Если функция $f(x; y)$ не дифференцируема в точке M_0, то она не имеет в этой точке ни одной частной производной.

Теорема 4. Если функция $f(x; y)$ не имеет в точке M_0 ни одной частной производной первого порядка, то она не дифференцируема в этой точке.

Ответы:

1) первая и третья теоремы верные;

[2)] вторая и четвертая теоремы верные;

3) первая и вторая теоремы верные;

4) первая и четвертая теоремы верные;

5) вторая и третья теоремы верные;

6) третья и четвертая теоремы верные.

32. Какие из следующих теорем верные?

Теорема 1. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, то она непрерывна в этой точке по каждой переменной в отдельности.

Теорема 2. Если функция $f(x; y)$ не является непрерывной в точке M_0 по каждой переменной в отдельности, то она не является непрерывной в этой точке.

Теорема 3. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в точке M_0 по каждой переменной в отдельности, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 4. Если функция $f(x; y)$ не является непрерывной в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, то она не является непрерывна в этой точке по каждой переменной в отдельности.

Ответы:

1) все теоремы верные;

2) первая и четвертая теоремы верные;

3) первая и третья теоремы верные;

4) вторая и четвертая теоремы верные;

5) все теоремы не верные;

[6)] первая и вторая.

33. Какие из следующих теорем верные?

Теорема 1. Если функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и не имеет экстремума в этой точке, то обе её частные производные первого порядка в точке M_0 отличны от нуля.

Теорема 2. Если обе частные производные первого порядка дифференцируемой функции $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ отличны от нуля, то она не имеет экстремума в этой точке.

Теорема 3. Если функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и обе её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то она имеет в точке M_0 экстремум.

Теорема 4. Если функция $f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то обе её частные производные первого порядка в точке M_0 равны нулю.

Ответы:

1) первая и третья теоремы верные;

[2)] вторая и четвертая теоремы верные;

3) все теоремы верные;

4) вторая и третья теоремы верные;

5) все теоремы неверные;

6) первая и четвертая теоремы верные.

IV. Тесты по разделу
«Интегральное исчисление функций многих переменных»

1. Не вычисляя, оценить величину интеграла $I = \iint\limits_D (2 + \cos xy)dxdy,$ где $D = \{(x, y) | 0 \le x < y \le 4\}$.

Ответы:

1) $16 \le I \le 48$; 2) $4 \le I \le 12$; [3)] $8 \le I \le 24$; 4) $3 \le I \le 9$.

2. Не вычисляя, оценить величину интеграла $I = \iint\limits_D \sin \frac{x^2 + y}{2x^2 + y^4 + 5} dxdy$, где $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 16,\ y \ge 0\}$.

Ответы:

1) $-16 \le I \le 16$; 2) $-4\pi \le I \le 4\pi$; 3) $-8 \le I \le 8$; [4)] $-8\pi \le I \le 8\pi$.

3. Не вычисляя, оценить величину интеграла $I = \iint\limits_D (\cos^2 x + \sin y)dxdy$, где $D = \{(x, y) | 4 \le x^2 + y^2 \le 16\}$.

Ответы:

[1)] $-12\pi \le I \le 24\pi$; 2) $4\pi \le I \le 16\pi$; 3) $-4\pi \le I \le \pi$; 4) $4 \le I \le 16$.

4. Не вычисляя, оценить величину интеграла $I = \iint\limits_D arctg(x + y)dxdy$, где $D = \{(x, y) | 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 3\}$.

Ответы:

[1)] $-2\pi \le I \le 2\pi$; 2) $0 \le I \le \pi$; 3) $-\pi \le I \le 2\pi$; 4) $-1 \le I \le 1$.

5. Найти среднее значение функции $f(x,y)=2x+y$ в области $D=\{(x,y)|0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4\}$.

Ответы:

1) 6; [2)] 3; 3) 1; 4) –3.

6. Найти среднее значение функции $f(x,y)=x^2$ в области $D=\{(x,y)|0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2\}$.

Ответы:

1) –6; [2)] 3; 3) 6; 4) 9.

7. Найти среднее значение функции $f(x, y)=3x^2-2y$ в области $D=\{(x, y)|1 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2\}$.

Ответы:

1) 54; 2) 160; 3) 3; [4)] 18.

8. Найти среднее значение функции $f(x, y)=x+xy$ в области $D=\{(x, y)|0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$.

Ответы:

1) 1; [2)] 2; 3) 3; 4) 5.

9. Выразить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ через повторный, если область D ограничена линиями $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\sin x$, $y=0$.

Ответы:

[1)] $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^{\sin x} dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)dx$; 3) $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$; 4)

4) $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{\pi} f(x,y)dx.$

10. Выразить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ через повторный, если область D ограничена линиями $x=3$, $y=0$, $y=x^2-4x$.

Ответы:

1) $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_0^{4} f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_0^{3} dx \int\limits_{-4}^{0} f(x,y)dy$; [3)] $\int\limits_0^{3} dx \int\limits_{x^2-4x}^{0} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^{4} dx \int\limits_{x^2-4x}^{0} f(x,y)dy.$

11. Выразить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ через повторный, если область D ограничена линиями $x=0$, $x=4-y^2$.

Ответы:

1) $\int\limits_0^{4} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy$; [2)] $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_0^{4-y^2} f(x,y)dx$; 3) $\int\limits_0^{2} dy \int\limits_0^{4-y^2} f(x,y)dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_0^{4} f(x,y)dx.$

12. Выразить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ через повторный, если область D ограничена линиями $x=0$, $y=2x$, $y=6-x$.

Ответы:

[1)] $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^{4} dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx$; 3) $\int\limits_0^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{6-y} f(x,y)dx$;

4) $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_0^{4} f(x,y)dy.$

13. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy.$

Ответы:

[1)] $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_y^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$; 3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_1^y dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy.$

14. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx.$

Ответы:

1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_2^0 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^0 f(x,y)dx$; 3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)dy$;

[4)] $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^2 f(x,y)dy.$

15. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^x f(x,y)dy.$

Ответы:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^y f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_{x^2}^x dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx$; 3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$;

[4)] $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

16. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^8 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$

Ответы:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^8 f(x,y)dy$; [2)] $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^3}^8 f(x,y)dy$; 3) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^{x^3} dy \int\limits_0^2 f(x,y)dy.$

17. Написать интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в полярных координатах в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$.

[1)] $\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_0^2 \rho\, d\rho \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\theta$; 4) $\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_2^4 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho.$

18. Написать интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в полярных координатах в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2,\ y\le 0\}$.

1) $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,d\theta$; [2)] $\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$;

3) $\int\limits_0^{2}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$; 4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{2}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$.

19. Написать интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в полярных координатах в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}$.

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$; 2) $\int\limits_0^{3}d\rho\int\limits_0^{\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\theta$;

[3)] $\int\limits_1^{3}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$; 4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\theta\int\limits_1^{3}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$.

20. Написать интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в полярных координатах в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le r^2,\ x\ge 0\}$.

1) $\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_1^{r}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$; 2) $\int\limits_0^{r}d\rho\int\limits_{\pi}^{2\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$;

3) $\int\limits_0^{r}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$; [4)] $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{r}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$.

21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2,\ y=x^3$.

Ответы:

1) $\frac{17}{12}$; 2) 16; 3) $\frac{12}{17}$; [4)] $\frac{1}{12}$.

22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0, y=x,\ y=2-x$.

Ответы: 1) $\frac{2}{3}$; 2) 4; [3)] 1; 4) $\frac{1}{2}$.

23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=1,\ x=4,\ y=\frac{1}{x},\ \ y=0$.

Ответы: 1) ln(e + 1); [2)] ln4; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 5.

24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x, y=5x,\ x=1$.

Ответы: [1)] 2; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{2}{3}$.

25. Тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ выразить через повторный, если область T ограничена плоскостями $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$.

Ответы:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)dz;$ [2)] $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz;$

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y} dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)dz;$ 4) $\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{1-z} dy\int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)dx.$

Примерный перечень вопросов для промежуточной аттестации

Во втором семестре

1. Понятие и способы задания функции.
2. Четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции, обратная функция.
3. Основные элементарные функции, их свойства и графики**.**
4. Понятие и предел последовательности и подпоследовательности.
5. Необходимое условие сходимости последовательности.
6. Предел суммы, произведения и частного последовательностей.
7. Монотонная последовательность и её предел. Число ***e***.
8. Лемма о вложенных отрезках.
9. Предел функции в точке по Коши и по Гейне. Односторонние пределы.
10. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и сравнение.
11. Предел суммы, произведения и частного функций.
12. Первый и второй замечательные пределы.
13. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Три определения непрерывности функции в точке.
14. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация.
15. Теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке.
16. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.
17. Непрерывность основных элементарных функций.
18. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции.

В третьем семестре

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной.
3. Уравнения касательной и нормали к кривой.
4. Непрерывность дифференцируемой функции.
5. Производная суммы, произведения, частного.
6. Производная сложной и обратной функций. Таблица производных.
7. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
8. Производные и дифференциалы высших порядков.
9. Теорема Фермы, Роля и Лагранжа.
10. Правила Лопиталя.
11. Формула Тейлора.
12. Условия постоянства и монотонности функции.
13. Экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия экстремума.
14. Выпуклость и точки перегиба функции.

15. Асимптоты функции.
16. Полное исследование функции и построение её графика.

В четвертом семестре

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
2. Основная таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Интегрирование сложной функции.
3. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование по частям.
4. Интегрирование дробно-рациональных функций. Метод неопределенных коэффициентов.
5. Интегрирование простых рациональных дробей. Понятие о не интегрируемости функции.
6. Интегрирование биномиального дифференциала. Подстановки Чебышева.
7. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$. Подстановки Эйлера.
8. Интегрирование тригонометрических функций. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx,\ \int \sin ax \cos bx dx,\ \int \sin ax \sin bx dx,\ \int \cos ax \cos bx dx.$
9. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла.
10. Необходимое и достаточное условия существование определенного интеграла.
11. Суммы Дарбу. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла.
12. Основные свойства определенного интеграла.
13. Теорема о среднем значении функции.
14. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной непрерывной функции.
15. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
16.Замена переменной в определенном интеграле и интегрирование по частям.
17. Вычисление площади плоской фигуры, заданной в явном виде и параметрически.
18. Вычисление площади плоской фигуры, заданной в полярных координатах.
19. Понятие несобственного интеграла первого рода. Вычисление несобственного интеграла первого рода от непрерывной функции.
20. Понятие несобственного интеграла второго рода. Вычисление несобственного интеграла от непрерывной функции второго рода.

В пятом семестре

1. Область определения, график, линии уровня функции двух переменных.
2. Кратный предел, повторные пределы непрерывность функции двух переменных.
3. Частные производные и дифференциалы первого и высших порядков и функции двух переменных.
4. Теорема о достаточном условии дифференцируемости функции двух переменных.
5. Частные производные сложных функций. Инвариантность полного дифференциала первого порядка сложной функции.
6. Производная по направлению. Градиент.
7. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие и достаточные условия экстремума.
8. Условный экстремум, метод Лагранжа.
9. Понятие и вычисление двойного интеграла в прямоугольной и в произвольной области.
10. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
11. Понятие и вычисление тройного интеграла. Цилиндрические и сферические координаты.

12. Приложения кратных интегралов.

13. Криволинейный интеграл по координатам: понятие, существование, свойства и вычисление. Формула Грина.

14. Независимость криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования.

15.Криволинейный интеграл по длине дуги: понятие и вычисление

16. Приложения криволинейных интегралов первого и второго типов.

В шестом семестре

1. Числовые ряды: понятие, сходимость и сумма ряда. Геометрический ряд. Свойства сходящихся рядов. Гармонический и обобщенный гармонический ряды.

2.Необходимый признак сходимости ряда. Теоремы об остатке ряда.

3. Признаки сходимости положительных рядов.

4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Применение признака Лейбница для вычисления приближенного значения суммы знакочередующегося ряда.

5. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Теорема об абсолютной сходимости знакопеременного ряда. Перестановка членов в абсолютно сходящемся ряде.

6. Понятие, область сходимости и равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда.

7. Теорема о непрерывности предельной функции функциональной последовательности и функционального ряда.

8. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

9. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Теорема о непрерывность суммы функционального ряда.

10. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

11.Понятие степенного ряда. Теорема Абеля о степенных рядах. Радиус сходимости степенного ряда.

12.Основные свойства степенных рядов: теоремы о равномерной сходимости и об интегрировании и дифференцировании степенных рядов.

13. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.

14. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

15. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

16. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов.

17. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема Дирихле о достаточных условиях разложимости функций в ряд Фурье.

18. Разложение четной и нечетной функций в ряд Фурье.

19. Понятие периодического продолжения функции. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье в промежутке $[0, \pi]$.

20. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье на отрезках $[-l, l]$, $[0, l]$.

5.4 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Результаты формирования компетенций по дисциплине оцениваются по балльно-рейтинговой системе.

Всего по дисциплине студент может набрать 100 баллов (или более с учетом бонусных баллов), из которых 20 баллов составляют баллы за посещаемость, 50 – за активность и 30 студент получает на зачете или на экзамене.

Всего по дисциплине предусмотрено два модуля. Для расчета баллов, полученных студентом за модуль и итогового рейтинга с учетом трудоемкости дисциплины, включенной в учебный план, показатели (по посещению, активности, рубежного контроля) перемножаются на соответствующие коэффициенты. Данные коэффициенты определяются отдельно для каждого модуля следующим образом:

Коэффициент посещения - $K_{\text{посещ.}}=10/ N_{\text{зан.}}$

Коэффициент активности - $K_{\text{актив.}}=25/ N_{\text{актив.}}$

Где:

$N_{\text{зан.}}$ – количество занятий (пар) по дисциплине в данном модуле;

$N_{\text{актив.}}$ – максимальное количество баллов, которое может набрать студент на занятиях (практических, семинарских, лабораторных) в данном модуле + баллы, полученные на рубежном контроле.

Баллы, полученные студентами, заносятся в журнал сразу после окончания занятия, во время которого эти баллы были получены.

Оценка на промежуточном контроле (зачет, экзамен) выставляется по результатам баллов, полученным студентом в сумме обоих модулей по следующей таблице

<table>
<tr><th>Набранные студентом баллы</th><th>Оценка на промежуточном контроле, если дисциплина завершается экзаменом (зачетом с оценкой)</th><th>Оценка на промежуточном контроле, если дисциплина завершается зачетом</th></tr>
<tr><td>от 0 до 50</td><td>неудовлетворительно</td><td>не зачтено</td></tr>
<tr><td>от 51 до 64</td><td>удовлетворительно</td><td rowspan="3">зачтено</td></tr>
<tr><td>от 65 до 74</td><td>хорошо</td></tr>
<tr><td>от 75 до 100</td><td>отлично</td></tr>
</table>

Для процедуры оценивания используются тесты, контрольные работы.

Наиболее способным студентам преподаватель рекомендует специальную научную разработку отдельных тем и проблем курса в рамках работы кафедрального кружка студенческого научного общества с последующими выступлениями на ежегодных научных конференциях университета.

Тестирование: на практических занятиях реализуется **тестирование** студентов с целью контроля результатов их самостоятельной работы по усвоению основных понятий и тем курса.

Оценка работы с тестовыми заданиями:

0- 20 % правильных ответов оценивается как «неудовлетворительно»; 30-50% - «удовлетворительно»; 60-80% - «хорошо»; 80-100% – «отлично».

Система оценки ответа студента на зачете:

Оценка "незачтено" выставляется при незнании основных вопросов материала или при наличии грубых ошибок в ответах на них, неумении на основе теоретических знаний решать практические задачи.

Оценка "зачтено" выставляется при достаточно полном знании материала учебной программы, отсутствии существенных неточностей при его изложении и в ответах на вопросы, умении решать практические задачи.

Система оценки ответа студента на экзамене:

Оценка за каждый вопрос и итоговая оценка выставляется в 4-х бальной системе: "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно". При этом:

Оценка "отлично" выставляется при глубоком и всестороннем знании материала учебной программы, грамотном и логически стройном его изложении, умении на основе теоретических знаний решать практические задачи.

Оценка "хорошо" выставляется при твердом и достаточно полном знании материала учебной программы, отсутствии существенных неточностей при его изложении и в ответах на вопросы, умении решать практические задачи.

Оценка "удовлетворительно" выставляется при наличие неточностей в знании основного материала, при допущении ошибок при выполнении практических заданий.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется при незнании основных вопросов экзаменационного билета или наличии грубых ошибок в ответах на них, неумении на основе теоретических знаний решать практические задачи.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

8.1. Основная учебная литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.. Лекции по математическому анализу, –М.: Высшая шк., 2004. -695 с.

2. Берман Г.Р. Сборник задач по курсу математического анализа. –М.: «Наука», 1985. -383 с.

3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие /Под ред. В.Ф. Бутузова. 6-е изд, Изд-во «Лань»,2008.-480 с.

4. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А.. Матвеев И.В. и др. Ч.1, ч. 2. –М.: Изд «Просвещение». 1971.

5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие 7-е изд. Изд-во «Лань», 2010.-464с.

6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа ч.1. –М.: Лань. 2006. -448 с.

7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа ч.2. –М.: Лань. 2006. -464 с.

8. Шипачев В.С. Ш.:№. Высшая математика : учеб.пособие для бакалавров/В.С. Шипачев: под ред. А.Н.Тихонова.-8-е изд, перераб. И доп. М.: Изд-во Юрайт, 2012.-447с.

9. Керимов К.Г. Практические занятия по математическому анализу (Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных), издание 2. Махачкала, ДГПУ, 2011. -295 с.

10. Керимов К.Г., Гаджиева З.Д. Практические занятия по математическому анализу (Числовые и функциональные ряды). Махачкала ДГПУ, 2016. -80 с.

8.2 Дополнительная учебная литература

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. -М.: Лань. 2009. -736 с.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – СПб: Лань, 206. – 544 с..

3. Зорич В.А. Математический анализ. М.: Наука, ч.I 1981, ч.II 1984.

4. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.I и т.II. М.: Наука, 1972.

5.5Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.I и т.II. М.: Наука, 1965.

6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Учебник в 3-х тт. Т.1 9-е изд. Изд-во «Лань», 2009.-608 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Учебник в 3-х тт. Т.2 9-е изд. Изд-во «Лань», 2009.-800 с.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Учебник в 3-х тт. Т.3 9-е изд. Изд-во «Лань», 2009.-656 с

10. Керимов К.Г. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Учебное пособие для организации межсессионной самостоятельной работы студентов заочного отделения математического и физического факультетов. Махачкала ДГПУ, 2006.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Электронные ресурсы:

1. ht tp://www.math.ru — математический сайт
2. ht tp://window.edu.ru/window — информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» с обширной библиотекой по основным раздел ам математики
3. ht tp://www.exponenta.ru/ - образовательный математический сайт

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для изучения курса студентам необходимо использовать лекционный материал, учебники и учебные пособия из списка литературы, статьи из периодических изданий, ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Кроме того, целесообразно использовать следующие методические материалы:

1. Варианты контрольных работ и тестов.
2. Задачи для практических занятий самостоятельной работы
3. Раздаточный материал для практических занятий.
4. Задания для промежуточного и текущего контроля знаний студентов.
5. Электронную базу данных по дисциплине.
6. Рабочие тетради студентов.

Для теоретического и практического усвоения дисциплины большое значение имеет самостоятельная работа студентов, которая может осуществляться студентами индивидуально и под руководством преподавателя.

Самостоятельная работа студентов, предусмотренная учебным планом в объеме не менее 50-70% общего количества часов, направлена на более глубокое усвоение изучаемого курса, формирование навыков исследовательской работы и ориентирование студентов на умение применять теоретические знания на практике.

После изучения теоретического материала студент должен:

- знать основные аксиомы и теоремы математического анализа.
- овладеть методами доказательств теорем в математическом анализе.

По окончании практического курса студент должен:

- овладеть основными методами решения задач.

Для успешного освоения учебного материала курса «Математический анализ» требуются систематическая работа по изучению лекций и рекомендуемой литературы, решению домашних задач и домашних контрольных работ, а также активное участие в работе практических занятий.

Показателем освоения материала служит успешное решение задач, предлагаемых в лабораторных работах, выполнение домашних заданий, аудиторных самостоятельных и контрольных работ.

В качестве оценочных средств программой дисциплины предусматривается:

- текущий контроль (аудиторные контрольные работы, домашние задания).
- итоговой контроль (Зачет или экзамен).

Формы текущего, промежуточного и итогового контроля.

Текущий контроль:

- Самостоятельные работы
- Индивидуальные задания

- Опрос студентов

Промежуточный контроль:

- Контрольная работа по курсу

Итоговый контроль:

- экзамен или зачет

11.Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

1. Электронная библиотека курса, конспекты лекций, задания для практических занятий и самостоятельной работы, варианты тестовых заданий для проверки текущих и остаточных знаний студентов, варианты заданий для текущего и промежуточного контроля знаний обучающихся
2. Компьютерное и мультимедийное оборудование .
3. Методические рекомендации по изучению дисциплины.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Для проведения лекционных и практических занятий имеются аудитории, оснащенные всей необходимой мебелью и инвентарем. Для отдельных занятий аудитории оснащены проектором, ноутбуком и интерактивным экраном для демонстрации слайдов и т.п.